Jyväskylän yliopisto
Tietotekniikan laitos
Pekka Orponen

TIE211 Tietorakenteet ja algoritmit 2

Loppukoe ke 20.1.1999 klo 8–12

1. Laadi algoritmi, jonka suoritusaikaa vakiotekijöitä lukuunottamatta kuvaa rekursioyhtälö

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4T(n/2) + n^2, \qquad \text{kun } n = 2^k, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

   Algoritmi saa syötteenään n-alkioisen taulukon $A[1..n]$, mutta sillä, mitä algoritmi varsinaisesti tekee, ei ole merkitystä. Määritä em. rekursioyhtälön ratkaisun kertaluokka, kun n on kahden potenssi.

2. Ns. *Eulerin luku* $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ ilmaisee, monessako joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatiossa π on tasan k *nousua*, so. positiota i joissa $\pi(i) < \pi(j)$. Luvut voidaan laskea rekursioyhtälöstä:

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1, \\ &\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle, \quad \text{kun } n \geq k \geq 1, \\ &\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = 0, \quad \text{kun } n < k. \end{aligned}$$

   Laadi em. kaavoihin perustuva kohtuullisen tehokas algoritmi luvun $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ määrittämiseksi. Mikä on algoritmisi aika- ja tilavaativuus?

3. Suunnittele peruuttava algoritmi ns. n *kuningattaren ongelman* ratkaisemiseen: $n \times n$-shakkilaudalle on sijoitettava (mikäli mahdollista) n kuningatarta niin, että ne eivät uhkaa toisiaan, so. niin että mitkään kaksi nappulaa eivät ole keskenään samalla laudan rivillä, sarakkeella eivätkä diagonaalilla. Mikä on algoritmisi aikavaativuus?

4. Määrittele seuraavat käsitteet: ongelmaluokka NP, polynominen palautus, NP-täydellinen ongelma. Anna kaksi esimerkkiä NP-täydellisistä ongelmista ja osoita, että niiden välillä vallitsee polynominen palautusrelaatio. (Yhdensuuntainen palautus riittää, palautusekvivalenssia ei tarvitse osoittaa.)

Pisteytys: Kukin tehtävä 15 pistettä, yhteensä 60 pistettä.