MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 9, 22.3.

1. Fibonacci-lukujen jonon generoiva funktio on tunnetusti $f(z) = z/(1-z-z^2)$. Määritä tällä perusteella mahdollisimman tarkka arvio Fibonacci-luvun f_n, $n \geq 0$, suuruudelle, käyttäen hyväksi funktion $f(z)$ navoista saatavaa tietoa.

2. Lukujonon $(a_n)_{n\geq 0}$ eksponentiaalinen generoiva funktio on $\hat{a}(z) = e^z/(1-4z^2)$. Arvioi lukujen a_n suuruusluokkaa.

3. Harjoitusten 8 tehtävässä 2 johdettiin involuutioiden luokalle eksponentiaalinen generoiva funktio $\hat{t}(z) = e^{z+z^2/2}$ ja tästä n alkion involuutioiden määrälle t_n rekursiokaava

$$t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}, \qquad t_0 = t_1 = 1.$$

   Luennolla johdettiin edelleen egf:n $\hat{t}(z)$ perusteella yläraja

$$t_n \quad \leq \quad n!\,(e^{\sqrt{n}+n/2})/n^{n/2} \quad \approx \quad \sqrt{2\pi n}\, e^{\sqrt{n}}(\frac{n}{e})^{n/2}.$$

   Arvioi numeerisesti tämän ylärajan hyvyyttä. (*Vihje:* Tarkastele erityisesti suhdelukua yläraja$_n/\sqrt{n}t_n$.)

4. Johda alaraja luvulle $n!$ siitä havainnosta, että lukujonon $1/n!$ generoiva funktio on e^z.

5. Bellin lukujen, so. n alkion ositusten määrää kuvaavien lukujen b_n, eksponentiaalinen generoiva funktio on $\hat{b}(z) = \exp(e^z - 1)$. (Ks. esim. harjoitus 7, tehtävä 3.) Johda tällä perusteella jokin yläraja luvun b_n suuruudelle. (Jos haluat tutkia määrittämäsi ylärajan hyvyyttä, niin tarkkoja Bellin lukujen arvoja saa vaivattomasti esim. “Online Encyclopedia of Integer Sequences”-palvelimelta, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`.)