MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 8, 15.3.

1. Luennolla todettiin, että sekoituspermutaatioiden (engl. derangements) luokan egf on $\hat{d}(z) = e^{-z}/(1-z)$. Johda tästä yksinkertainen rekursiokaava n alkion sekoitusten määrälle. Keksitkö kaavalle myös kombinatorisen tulkinnan?

2. *Involuutio* on permutaatio, joka on oma käänteiskuvauksensa. (Syklihajotelmaa ajatellen tämä tarkoittaa siis sitä, että permutaatiossa on vain yhden ja kahden pituisia syklejä.) Muodosta involuutioiden luokan egf ja johda tästä yksinkertainen rekursiokaava n alkion involuutioiden määrälle.

3. Olkoon $h(z) = \sum_{n \geq m} h_n z^n$, missä $h_m \neq 0$, formaali Laurent-sarja. Todista seuraavat tulokset:
   (a) $\mathrm{Res}(h'(z)) = 0$;
   (b) $\mathrm{Res}(h'(z)/h(z)) = m$.

4. Luennolla todettiin, että juurrettujen järjestämättömien nimettyjen puiden egf $\hat{t}(z)$ toteuttaa yhtälön $\hat{t}(z) = ze^{\hat{t}(z)}$. Osoita tämän yhtälön perusteella oikeaksi Cayleyn tulos, jonka mukaan n-solmuisia nimettyjä puita on kaikkiaan n^{n-2} kappaletta. (Sama tulos on aiemmin todistettu Johd. Diskr. Mat. -kurssilla puiden ns. Prüfer-koodausta käyttäen.)

5. Johda n-solmuisten nimeämättömien juurrettujen järjestettyjen puiden ja n-solmuisten binääripuiden (juurretut järjestetyt puut, joiden jokaisella solmulla on 0 tai 2 jälkeläistä) lukumääriä kuvaavat lausekkeet suoraan vastaavien tgf-konstruktioiden ja Lagrangen inversiokaavan avulla.

6. Käyttämällä yhden sijaan useampaa muuttujaa voidaan generoivilla funktioilla pitää kirjaa tarkasteltavien olioiden useammasta ominaisuudesta samanaikaisesti. Liittyköön esim. kuhunkin olioon $\sigma \in \mathcal{S}$ kaksi painolukua $u(\sigma)$ ja $v(\sigma)$. Tällöin määritellään perheen $\mathcal{S}$ kahden muuttujan tavallinen ja eksponentiaalinen generoiva funktio luonnollisesti:

$$s(x,y) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} x^{u(\sigma)} y^{v(\sigma)}, \qquad \hat{s}(x,y) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \frac{x^{u(\sigma)}}{u(\sigma)!} \cdot \frac{y^{v(\sigma)}}{v(\sigma)!}.$$

   Osoita, että n alkion osituksia k epätyhjään luokkaan kuvaava kahden muuttujan eksponentiaalinen generoiva funktio on:

$$\sum_{n,k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!} \quad = \quad \exp\left\{ y(e^x - 1) \right\},$$

   ja n alkion perusjoukon k-syklisiä permutaatioita kuvaava kahden muuttujan eksponentiaalinen generoiva funktio on:

$$\sum_{n,k} \left[{n \atop k} \right] \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!} \quad = \quad \exp\left\{ y \ \ln \frac{1}{1-x} \right\}.$$

   (Sarjojen kertoimia $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ja $\left[{n \atop k} \right]$ sanotaan *toisen* ja *ensimmäisen lajin Stirlingin luvuiksi.*)

7. **[Vaikea?]** Osoita, että Lagrangen inversiokaava voidaan vahvistaa seuraavaan muotoon. Olkoot $u(t)$ ja $\phi(u)$ formaaleja potenssisarjoja, joilla on voimassa $\phi(0) = \phi_0 \neq 0$ ja $u(t) = t\phi(u(t))$. Olkoon edelleen $f(u)$ mielivaltainen formaali potenssisarja. Tällöin on kaikilla $n \geq 1$:

$$[t^n]\{f(u(t))\} = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\{f'(u)\phi(u)^n\}.$$