MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001

Harjoitus 7, 8.3.

1. Olkoon $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ formaali potenssisarja. Todista seuraavat tulokset:
   (a) $F' = 0$, jos ja vain jos $F = a_0 =$ vakio;
   (b) $F' = F$, jos ja vain jos $F = a_0 \cdot \mathrm{Exp}(X)$.

2. Todista, että jos $a = \langle a_n \rangle$, $b = \langle b_n \rangle$ ja $c = \langle c_n \rangle$ ovat (kompleksisia) lukujonoja, missä $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$, niin jonojen eksponentiaalisten generoivien funktioiden kesken on voimassa suhde $\hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z)$.

3. Osoita, että Bellin luvut b_n, missä b_n = n-alkioisen perusjoukon ositusten määrä, toteuttavat rekursioyhtälön
$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \quad b_0 = 1.$$
Johda tämän perusteella jonon $b = \langle b_n \rangle$ eksponentiaalinen generoiva funktio $\hat{b}(z)$. (*Vihje:* Derivoi jonon egf-sarja ja ratkaise syntyvä differentiaaliyhtälö.)

4. Palautetaan mieliin, että (2. lajin) Stirlingin luvut $\left\{ {n \atop k} \right\}$ toteuttavat rekursioyhtälön
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \quad \text{kun } (n,k) \neq (0,0); \qquad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$$
Johda tämän perusteella tavallinen generoiva funktio jonolle jonon $s = \langle s_n \rangle$, missä $s_n = \left\{ {n \atop k} \right\}$ (so. Stirlingin luvut annetulla kiinteällä k:n arvolla). Saatko purettua em. generoivasta funktiosta eksplisiittiset lausekkeet sen kertoimina esiintyville luvuille $\left\{ {n \atop k} \right\}$?

5. Määritellään kombinatoristen perheiden välinen "multipotenssikonstruktio" $C = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ seuraavasti. Perheen C muodostavat kaikki A:sta valitut "multijoukot" $\{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_k^{j_k}\}$, missä kukin $\alpha_i \in A$ ja yläindeksi j_i merkitsee alkion α_i kertalukua multijoukossaan. Perheen C olioiden painofunktio määritellään:
$$w_C(\{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_k^{j_k}\}) = j_1 w_A(\alpha_1) + \cdots + j_k w_A(\alpha_k).$$
Osoita, että tämä konstruktio on tgf-kelpoinen, ja että sitä vastaava tgf-operaattori on
$$c(z) = \exp(a(z) + \frac{1}{2}a(z^2) + \frac{1}{3}a(z^3) + \cdots).$$

6. Sovella kombinatoristen konstruktioiden tekniikkaa ("operaattorimenetelmää") seuraavien tavallisten generoivien funktioiden muodostamiseen:
   (a) Annetun m-alkioisen perusjoukon n-alkioisten osajoukkojen määrä potenssikonstruktiota käyttäen.
   (b) Annetun m-alkioisen perusjoukon n-alkioisten "multiosajoukkojen" (toisteisten n-valintojen) määrä edellisen tehtävän multipotenssikonstruktiota käyttäen.

7. Tarkastellaan n identtisen pallon sijoitteluja k toisistaan erottuvaan lokeroon, so. luvun n järjestettyjä ***k*-kompositioita** $n = n_1 + \cdots + n_k$. Määritä n:n k-kompositioiden tgf annetulla k, sekä sellaisten k-kompositioiden lukumäärät, joissa: (a) $n_i \geq i$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, (b) n ja kaikki n_i:t ovat parillisia, (c) kaikki n_i:t ovat parittomia.