MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 6, 1.3.

1. Montako syklirakenteeltaan erilaista permutaatiotyyppiä on 15 alkion joukolla?

2. Sanotaan, että luvun n ositus on *itsekonjugoitu*, jos sen Ferrers-kaavio on oma konjugaattinsa. Osoita, että luvun n itsekonjugoitujen ositusten määrä on sama kuin sellaisten n:n ositusten määrä, joiden kaikki termit ovat parittomia ja erisuuria.

3. Karakterisoi erotus $p(n) - p(n-1)$ tietyntyyppisten luvun n ositusten määränä.

4. Olkoon $k \geq 1$. Määritä jonojen $p(n \mid \text{osituksessa tasan } k \text{ termiä })$ ja $p(n \mid \text{suurin termi tasan } k)$ generoivat funktiot.

5. Merkitään $p_k(n) = p(n \mid \text{osituksessa tasan } k \text{ termiä})$. Osoita, että
$$p_k(n) \geq \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$
Johda tästä tuloksesta edelleen jokin alaraja luvun n kaikkien ositusten määrälle $p(n)$.

6. Olkoot $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, $G(X) = \sum_{m\geq 0} b_m X^m$ ja $F_i(X) = \sum_{k\geq 0} c_{ik} X^k$ ($i = 0, 1, \ldots$) formaaleja potenssisarjoja. Esitä sopivat määritelmät potenssisarjojen summalle $\sum_{i\geq 0} F_i(X)$ ja yhdistetylle potenssisarjalle $G(F(X))$, sekä todista seuraavat sarjojen tulon, yhdistetyn sarjan ja (äärettömän) summan derivointia koskevat säännöt:
$$\begin{aligned} D\, F(X)G(X) &= F'(X)G(X) + F(X)G'(X), \\ D \sum_{i\geq 0} F_i(X) &= \sum_{i\geq 0} F_i'(X), \\ D\, G(F(X)) &= G'(F(X)) \cdot F'(X). \end{aligned}$$