

MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001

Harjoitus 5, 22.2.

1. Ratkaise harjoitusten 4 tehtävä 5 (verkon $G = K_1 + 2(K_1 + 2K_1)$ sinipunaväritysten määrä) Pólyan lauseen avulla. Määritä myös sellaisten verkon G väritysten määrä, joissa on 3 punaista ja 4 sinistä solmua.
2. Määritä tasasivuisen kuution kiertojen muodostaman symmetriaryhmän sykli-indeksi, kun kiertojen perusjoukoksi otetaan kuution sivut. (Ryhmässä on 24 alkia.) Monellako oleellisesti erilaisella tavalla kuution sivut voidaan värittää kahdella värillä? Moniko värityksistä on sellaisia että kumpaakin väriä on kolmella sivulla?
3. (a) Eräässä TV-visailussa käytetty pyörítettävä onnenpyörä jaetaan viiteen yhtä leveään sektoriin, jotka väritetään kolmella värillä (punainen, valkoinen, musta [“rosvo-sektori”]). Monellako tavalla onnenpyörä voidaan värittää niin, että sektoreista on kaksi punaista, kaksi keltaista ja yksi musta?
(b) Montako erilaista helminauhaa voidaan muodostaa kahdesta punaisesta, kahdesta valkeasta ja yhdestä mustasta helmestä?
4. Määritä viisisolmuisen täydellisen verkon automorfismiryhmän sykli-indeksi.
5. Osoita, että permutaatioryhmien G ja H summaryhmän $G+H$ sykli-indeksille pätee yhtälö $Z(G+H) = Z(G)Z(H)$. (Palautetaan mieliin, että jos G toimii joukossa $\{1, \dots, n\}$ ja H toimii joukossa $\{n+1, \dots, n+m\}$, niin summaryhmän $G+H$ alkion $(g+h)$ toiminta määritellään: $(g+h)(i) = g(i)$, jos $i \leq n$, ja $(g+h)(i) = h(i)$, jos $i > n$.) Määritä tämän tuloksen nojalla ryhmän $\text{Aut } K_{2,3}$ sykli-indeksi.
6. Jos annetun n -alkioisen perusjoukon alkioiden väityksessä käytetään vain kahta väriä (esim. "valkoinen", "musta"), voidaan näitä kätevästi merkitä symboleilla 1 ja x erityisten värinimien B ja W (tms.) sijaan. Erilaisten väritysten määriä kuvaava generoiva funktio saa tällöin muodon $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, missä kukin kerroin a_i ilmaisee sellaisten väritysten määrän, joissa i perusjoukon alkia on väritetty "mustaksi" ja loput $n-i$ alkia "valkeaksi". Kirjoita tätä merkintää käyttäen verkon $K_{2,3}$ erilaisten 2-väritysten määriä kuvaava generoiva funktio.