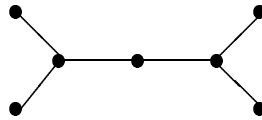


MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001

Harjoitus 4, 15.2.

1. Todista, että diedriryhmä D_2 ja syklinen ryhmä C_4 ovat isomorfaa vaille ainoat neljän alkion ryhmät. Myös kuusialkioisia ryhmiä on vain kaksi erilaista: mitkä ne ovat (nimi ja kertotaulu)? Karakterisoi kaikki ryhmät Γ , joiden kertaluku on $1 \leq |\Gamma| \leq 7$.
2. Todista ns. *Cayleyn lause*: jokainen (äärellinen) ryhmä on isomorfinen jonkin (äärellisen perusjoukon) permutaatioryhmän kanssa. (*Vihje*: Tarkastele ryhmän (Γ, \cdot) alkioiden g omassa perusjoukossaan Γ indusoimia permutaatioita.)
3. Osoita, että jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, joilla $\text{sy}(m, n) = 1$, niin $C_m \times C_n \cong C_{mn}$. (*Vihje*: Etsi sopiva virittäjäalkio tuloryhmälle $C_m \times C_n$.) Todista tämän tuloksen avulla ns. *kiinalainen jäännöslause*: jos $\text{sy}(m, n) = 1$, niin jokaisella kongruenssiparilla $x \equiv a \pmod{m}$, $x \equiv b \pmod{n}$, on joukossa $\{0, \dots, mn - 1\}$ yksikäsitteisesti määrätty ratkaisu x .
4. Montako "oleellisesti erilaista" pelitilannetta on 3×3 -ristinollassa kolmen puolisiirron ($2^*X, 1^*O$) jälkeen? Pelitilanteet ovat "oleellisesti samanlaiset", jos ne voidaan muuntaa toisikseen pelilaudan kierroilla tai peilauksilla.
5. Monellako oleellisesti erilaisella tavalla voidaan oheisen verkon solmut värittää "sinisiksi" ja "punaisiksi"? (Väriytykset ovat oleellisesti samanlaiset, jos jokin verkon automorfismi samaistaa ne.)



6. Todista seuraava painotettu versio "Burnsiden lemmasta": Olkoon Γ äärellinen ryhmä, joka toimii äärellisessä joukossa X . Olkoot Γ :n määräämät radat X :ssä $\theta_1, \dots, \theta_t$. Liitetään kuhunkin rataan θ "paino" $w(\theta)$, joka on myös sama kaikilla radan θ alkioilla $x \in X$ (so. jos $\Gamma x = \theta$, niin $w(x) = w(\theta)$). Tällöin on:

$$\sum_{i=1}^t w(\theta_i) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} \sum_{x \in F(g)} w(x).$$