MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 2, 1.2.

1. Arvioi, miten ison ylärajan edellisissä harjoituksissa käsitelty Ramseyn lauseen todistus (Teht. 3, myös van Lint & Wilson Thm 3.3) antaa konveksin n-kulmion takaamiseen vaadittujen pisteiden N määrälle luennolla esimerkkinä käsitellyssä Erdösin–Szekeresin konstruktiossa (van Lint & Wilson, Thm 3.6).

2. Osoita, että jos $1 \leq k \leq n/2$ ja $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ on osittainjärjestyksen $\mathcal{P}_n = (\mathcal{P}([n]), \subseteq)$ antiketju ("Sperner-perhe"), jossa $|A_i| \leq k$ kaikilla $i = 1, \dots, m$, niin $m \leq \binom{n}{k}$.

3. Todista, Dilworthin lausetta (vL&W Thm 6.1) käyttäen, että mikä tahansa luonnollisten lukujen $1, 2, \dots, n^2+1$ permutaatio $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ sisältää monotonisen (joko nousevan tai laskevan) $n+1$ luvun mittaisen alijonon.

4. Tarkasta, että luennolla esitetty De Bruijnin ym. konstruktio (vL&W, s. 44) todella muodostaa osittainjärjestyksen $\mathcal{P}_n = (\mathcal{P}([n]), \subseteq)$ osituksen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ symmetriseen ketjuun. Totea, että Spernerin lause (vL&W, Thm 6.3) seuraa suoraan tästä osituksesta.

5. Todista seuraava Erdös-Ko-Rado -lauseen (vL&W Thm 6.4) muunnelma (vL&W Thm 6.5): Olkoon $1 \leq k \leq n/2$ ja $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}_n$ leikkaava joukkoperhe, joka on myös antiketju (so. jos $i \neq j$, niin $A_i \not\subseteq A_j$), ja lisäksi $|A_i| \leq k$ kaikilla $i = 1, \dots, m$. Tällöin on $m \leq \binom{n-1}{k-1}$. (Käytä apuna alkuperäistä EKR-lausetta (vL&W Thm 6.4) ja edellisessä tehtävässä mainittua järjestyksen $\mathcal{P}_n$ ketjuositusta.)