MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 12, 11.4.

1. Määritä raja-arvo $\lim_{q\to 1} \left[{n \atop k}\right]_q$.

2. Todista, että on olemassa kertaluvun n projektiivinen taso (so. $S(2, n+1, n^2+n+1)$-tyyppinen asetelma), jos ja vain jos on olemassa kertaluvun n affiini taso (so. $S(2, n, n^2)$-tyyppinen asetelma).

3. Konstruoi kolmen pareittain ortogonaalisen 4×4-latinalaisen neliön muodostama MOLS, ja tämän perusteella kertaluvun 4 affiini taso $AG(2,4) \equiv S(2,4,16)$.

4. Osoita, että jos D on $2-(v,k,\lambda)$-asetelma, niin joukkoperhe D', joka sisältää täsmälleen D:n lohkojen komplementit, on $t-(v, v-k, \mu)$-asetelma eräillä t, μ. Määritä parametrien t, μ arvot. Muodosta Fanon tason $PG(2,2) \equiv STS(7)$ komplementtiasetelma.

5. 2-asetelmaa, jossa on Fisherin epäyhtälön mukainen minimimäärä lohkoja, $b = v$, sanotaan *symmetriseksi*. Esimerkiksi projektiiviset tasot ovat symmetrisiä asetelmia. Symmetrisen $2-(v,k,\lambda)$-asetelman D insidenssimatriisi on neliömatriisi, ja sen transpoosi kuvaa D:n *duaaliasetelman* D^*. Määritä asetelman D^* tyyppi, ja muodosta Fanon tason duaaliasetelma.

6. Osoita, että ei voi olla olemassa $2-(25,10,3)$-tyyppistä asetelmaa.

7. Olkoon $\lambda \geq 1$ ja $2 \leq k < v$. Joukko $D \subseteq \mathbf{Z}_v$, $|D| = k$, on (v,k,λ)-*erotusjoukko*, jos jokainen $a \in \mathbf{Z}_v \setminus \{0\}$ voidaan esittää kahden alkion $d_i, d_j \in D$ erotuksena $a = d_i - d_j \pmod{v}$ täsmälleen λ tavalla. Osoita, että jos D on (v,k,λ)-erotusjoukko, niin D:n translaatit
$$D + a = \{d + a \mid d \in D\}, \quad a \in \mathbf{Z}_v$$
muodostavat symmetrisen $2-(v,k,\lambda)$-asetelman. Totea, että joukko $\{1,2,4\}$ on $(7,3,1)$-erotusjoukko ja muodosta vastaava asetelma.