

MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001

Harjoitus 11, 5.4.

1. Ovatko seuraavat asetelmatyypit parhaan arvioksi mukaan mahdollisia: (a) 3-(15,6,2), (b) 4-(11,5,1)?
2. Osoita, että asetelmatyypin $STS(n) \equiv 2-(n,3,1)$ on mahdollinen vain, kun perusjoukon koko n on muotoa $n = 6k+1$ tai $n = 6k+3$. Konstruoi jokin $STS(7)$ -tyyppinen asetelma.
3. Osoita, että seuraava konstruktio tuottaa $STS(15)$ -tyyppisen asetelman: perusjoukoksi valitaan täydellisen verkon K_6 kaaret, ja lohkoiksi sellaiset kaarikolmikot, jotka muodostavat verkossa K_6 joko kolmion tai täydellisen pariutuksen.
4. Merkitään $n \times n$ -latinalaisten neliöiden lukumäärää $\mathcal{L}(n)$:llä. Todista, että jokaisella r -säännöllisellä kaksijakoisella verkolla on ainakin $r!$ täydellistä pariutusta, ja edelleen tämän nojalla että

$$\mathcal{L}(n) \geq \prod_{k=1}^n k!$$

Totea edelleen, että $\mathcal{L}(n) \leq (n!)^n$, ja siten

$$\ell(n) = \ln \mathcal{L}(n) = \Theta(n^2 \ln n).$$

(Merkintä $\Theta(f(n))$ tarkoittaa funktiota, joka on asympotoottisesti vakiota vaille kerta-luokkaa $f(n)$.) *Lisätieto:* Asympotoottisesti tarkka arvio on

$$\ell(n) = n^2(\ln n - 2 + o(1)),$$

missä $o(1)$ tarkoittaa virhetermiä joka lähestyy nollaa n :n kasvaessa. (Ks. van Lint & Wilson, s. 162.)

5. Muodosta neljä pareittain ortogonaalista 5×5 -latinalaista neliötä.
6. (a) Muodosta jokin 7×7 -taikaneliö, so. lukujen $0, \dots, 48$ sijoittelu 7×7 -neliöön niin, että neliön jokaisen rivin ja sarakkeen summa on 168.
(b) Osoita, että edellisen tehtävän kaltaisia 7×7 -taikaneliöitä, joiden kaikki rivi- ja sarakesummat täsmäävät, on ainakin 30 erilaista.