**MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001**
Harjoitus 10, 29.3.

1. Merkitään $\mu(n)$:llä tavallista lukuteoreettista Möbius-funktiota ja $\delta(n)$:llä luvun $n$ tekijöiden lukumäärää. Määritä summien $\sum_{d|n} \mu(d)$ ja $\sum_{d|n} \mu(d)\delta(n/d)$ arvot.

2. Osoita, että Eulerin funktion $\phi(n)$ Dirichlet'n generoiva funktio on $\zeta(s-1)/\zeta(s)$. Minkä funktioiden Dgf:ia ovat $\zeta(s-\alpha)$ ja $\zeta'(s)$?

3. Merkitään $\sigma(n) =$ luvun $n$ tekijöiden summa. Osoita, että $\sigma(n)$ on multiplikatiivinen. Määritä summan $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(n/d)$ arvo. Osoita, että funktion $\sigma(n)$ Dgf on $\zeta(s)\zeta(s-1)$.

4. Todista, lähtien yleisestä äärellisen hilan $L = (L, \preceq)$ Möbius-funktion $\mu_L(\alpha, \beta)$ määritelmästä, seuraavat tulokset:

   (a) Äärellisen perusjoukon $X$ potenssijoukkohilassa $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on:

   $$\mu(A, B) = \begin{cases} (-1)^{|B|-|A|}, & \text{kun } A \subseteq B, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   (b) Luonnollisen luvun $n \geq 1$ tekijähilassa $(\{d : d|n\}, \, |)$ on:

   $$\mu(d, e) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{kun } \frac{e}{d} = p_1 \cdots p_k, \text{ missä } p_1, \ldots, p_k \text{ eri alkulukuja,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

5. Todista Möbius-inversiota käyttäen seuraava yleinen binomisummien inversioperiaate: mille tahansa lukujonoille $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ on voimassa:

   $$\text{jos} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \quad \text{niin} \quad (-1)^n b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k.$$

   Johda edelleen tämän periaatteen sovelluksena summakaava: jos $r \geq n$, niin:

   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{r+k}{k} \quad = \quad (-1)^n \binom{r}{n},$$

   erityisesti siis:

   $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \quad = \quad (-1)^n.$$

6. Johda Möbius-funktio enintään $n$-bittisten binäärijonojen alkuosajärjestykselle $\preceq$, jossa siis $\alpha \preceq \beta$, $\alpha, \beta \in \{0,1\}^{\leq n}$, jos ja vain jos $\beta = \alpha\omega$, $\omega \in \{0,1\}^{\leq n}$.