

MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001

Harjoitus 1, 25.1.

1. Todista, että yhtenäinen verkko $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, on kaksijakoinen (so. $\chi(G) = 2$), jos ja vain jos G ei sisällä parittomia syklejä, so. jos mikään G :n aliverkko ei ole muotoa C_{2k+1} , $k \geq 1$.
2. Yritä todistaa, Heawoodin värityslauseen (tasoverkolla G on $\chi(G) \leq 5$) todistusta muokailleen, tasoverkkojen neliväriäusetta. Missä kohden todistusta tulee vaikeuksia?
3. Todista Ramseyn lause yleisessä joukkoperhemuodossaan: kaikilla $r \geq 1$, $s \geq 1$ ja $n_1, \dots, n_s \geq 1$ on olemassa $N \geq 1$, jolla $N \xrightarrow{r} (n_1, \dots, n_s)$. (Ks. van Lint & Wilson, ss. 23–24. Voit yksinkertaisuuden vuoksi rajoittaa tarkastelemaan tapausta $s = 2$.)
4. Todista seuraava ns. *Schurin lause*. Jos positiivisten kokonaislukujen joukko \mathbf{N}^+ osoitetaan äärelliseen määrään erillisiä luokkia $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_s$, niin jossakin luokassa \mathbf{N}_i on välttämättä luvut $x, y, z \in \mathbf{N}_i$, joilla $x + y = z$. (Lukujen x, y, z ei tarvitse olla kaikkien eri suuria.) (*Vihje*: Valitse annetulla s riittävän pitkä \mathbf{N}^+ :n alkusegmentti $\{1, \dots, N\}$. Väritä verkon K_N kaari $\{i, j\}$ erotuksen $|i - j|$ määräämällä värillä.)
5. Olkoon $m \geq 2$. Osoita, että jos n on riittävän suuri, niin jokainen $n \times n$ -binäärimatriisi $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ sisältää sellaisen $m \times m$ -alimatriisin B (so. sopivasti valitut m riviä ja vastaavat m saraketta), että matriisin B sekä ala- että yläkolmiomatriisi ovat homogeeniset (so. kumpikin sisältää vain joko 0:aa tai 1:tä). (*Vihje*: Väritä kaari $\{i, j\}$ värillä (a_{ij}, a_{ji}) , $i < j$.)