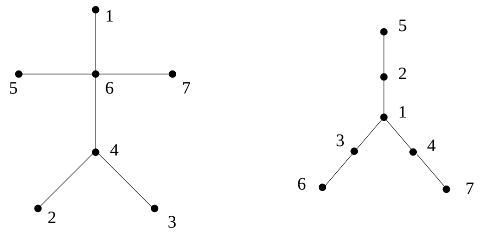
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan (3 ov)
Loppukoe ke 15.11.2000 klo 8–12

1. Olkoot $n \geq r \geq k \geq 1$ kokonaislukuja. Todista oikeiksi seuraavat binomikerroinyhtälöt:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \qquad \binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$
Anna jälkimmäiselle yhtälölle myös kombinatorinen tulkinta.

2. (a) Muodosta seuraavien puiden Prüfer-koodit:



Minkä 8-solmuisen puun Prüfer-koodi on (2,7,1,8,2,8)?

(b) Osoita, että jokaisen vähintään kaksisolmuisen puun T väriluku on $\chi(T) = 2$.

(c) Osoita, että jos puussa on solmu, jonka asteluku on $d \geq 1$, niin siinä on myös vähintään d lehteä.

3. (a) Piirrä verkko, jonka solmuina ovat nelialkioisen perusjoukon $\{1, 2, 3, 4\}$ kaikki kaksialkioiset osajoukot, ja solmujen X ja Y, $X \neq Y$, välillä on kaari, jos ja vain jos $X \cap Y \neq \emptyset$. Osoita, että näin saatu verkko on planaarinen.

(b) Osoita, että vastaavalla tavalla viisialkioisen perusjoukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kaksialkioisista osajoukoista muodostettu verkko *ei* ole planaarinen.

4. A:n tasavallan presidentinvaalien ääntenlaskussa on syntynyt kiperä tilanne: 370 Aku Ankalle (joka ei ollut ehdokkaana) annettua ääntä pitäisi jakaa ehdokkaiden B, G ja N kesken niin, että ehdokas B saa vähintään 200 ääntä, ehdokas G 100–199 ääntä ja ehdokas N enintään 10 ääntä. Monellako tavalla toivottu akuankkaäänten ositus voidaan suorittaa?

5. Tarkastellaan nelimerkkisen aakkoston $\{A, B, C, D\}$ merkkijonoja. Merkitään a_n:llä sellaisten n-merkkisten jonojen määrää, jotka sisältävät parittoman määrän A-merkkejä. (Siten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ jne.) Osoita, että lukuja a_n yhdistää rekursioyhtälö $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$, ja ratkaise tästä luvut a_n suljetussa muodossa. (*Vihje:* Osita $(n+1)$:n mittaiset merkkijonot sen mukaan, alkavatko ne A:lla vai jollain muulla merkillä.)

Pisteytys: Kukin tehtävä 12 pistettä, yhteensä 60 pistettä.