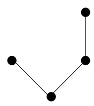
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan (3 ov)

Loppukoe ke 16.8.2000 klo 12–16

1. Piirrä kaikkien neljän alkion ei-isomorfisten osittainjärjestysten Hasse-kaaviot. (Alkiojoukon $\{a, b, c, d\}$ järjestykset $\leq_1$ ja $\leq_2$ ovat isomorfiset, jos on olemassa alkioiden permutaatio π, jolla on kaikilla $x, y \in \{a, b, c, d\}$ voimassa $x \leq_1 y$ joss $\pi(x) \leq_2 \pi(y)$. Siten esimerkiksi kaavioiden

kuvaamat järjestykset ovat keskenään isomorfiset permutaation $\pi : a \mapsto d, b \mapsto c, c \mapsto a, d \mapsto b$ kautta, ja niillä on "yhteinen" Hasse-kaavio



2. (a) Yatzy-noppapelissä pelaajat yrittävät viittä noppaa heittämällä saada aikaan tiettyjä säännönmukaisia silmälukuyhdistelmiä. Arvokkain yhdistelmä on "yatzy", jossa kaikilla viidellä nopalla on sama silmäluku. (Siis joko kaikissa viidessä nopassa 1, tai kaikissa 2, tai $\ldots$, tai kaikissa 6.) Mikä on todennäköisyys saada yatzy-yhdistelmä yhdellä noppien heittokerralla? (Todennäköisyyden lukuarvoa ei tarvitse laskea, kaava riittää.)

   (b) Muita Yatzy-pelin yhdistelmiä ovat "neliluku", jossa neljässä nopassa viidestä on keskenään sama silmäluku, ja "pieni suora", jossa noppien silmäluvut ovat 1-2-3-4-5. Mitkä ovat näiden yhdistelmien todennäköisyydet yhdellä heittokerralla? (Kaavat riittävät.)

   (c) Yatzy-pelissä kukin pelaaja saa vuorollaan yrittää parantaa tulostaan kahdella lisäheitolla, jättäen haluamansa osan nopista laudalle heittojen välillä. Oletetaan, että pelaaja on kahdella ensimmäisellä heitollaan saanut aikaan yhdistelmän 1-2-2-2-5. Kannattaako hänen kolmannella ja viimeisellä heitollaan ennemmin heittää uudelleen 1- ja 5-nopat saadakseen 2-yatzyn (arvo 50 pistettä) vai kaksi 2-noppaa saadakseen pienen suoran (arvo 30 pistettä)?

3. Ns. *Lucasin luvut* L_n määritellään rekursioyhtälöllä:

$$\begin{cases} L_0 = 1, \quad L_1 = 3, \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

   Ratkaise em. rekursioyhtälöstä luvuille L_n esitys suljetussa muodossa.

4. (a) Yhtenäisen verkon G solmujen ("kärkien") u ja v *etäisyys* $d(u, v)$ on lyhimmän niitä yhdistävän polun pituus. Verkon G *halkaisija* $d(G)$ on sen solmujen maksimaalinen etäisyys. Määritä verkkojen K_n (n solmun täydellinen verkko), C_n (n solmun sykli) ja P_n (n solmun polku) halkaisijat.

   (b) Osoita, että verkot K_n ja P_n ovat yhtenäisten n-solmuisten verkkojen joukossa yksikäsitteisesti halkaisijaltaan minimaalinen ja maksimaalinen verkko.

   (c) Suunnittele verkkoperhe G_n, jolla $d(G_n)$ ei ole vakio, mutta kasvaa hitaammin kuin lineaarisesti solmujen määrän suhteen. (Siis $d(G_n) \neq O(1)$, $d(G_n) = o(n)$.)

5. Tarkastellaan kuusibittistä lineaarista koodia, jonka tarkistusmatriisi on

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Määritä koodin kaikki koodisanat.

(b) Esitä, miten tarkistusmatriisia H käyttäen määritetään yhden bittivirheen sisältävää jonoa 101101 vastaava kooodisana.

Pisteytys: Kukin tehtävä 12 pistettä, yhteensä 60 pistettä.