Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan (3 ov)

Loppukoe ke 29.3.2000 klo 8–12

1. (a) Monenko positiivisten kokonaislukujen muodostaman kolmikon (k, l, m) kautta kulkee avaruuden $\mathcal{R}^3$ taso $x + y + z = r$, $r \in \mathcal{N}$?

   (b) Monellako tavalla voidaan viiden tentin osallistujat sijoittaa kolmeen saliin, kun vaaditaan että kaikki tiettyyn tenttiin osallistuvat sijoittuvat samaan saliin, ja mikään sali ei jää tyhjäksi?

2. Erääseen autourheilusarjaan osallistuu neljä merkkitallia. Monellako tavalla voidaan näiden kesken järjestää kymmenen auton osakilpailu, kun vaaditaan että kustakin tallista on oltava mukana vähintään yksi ja enintään kolme autoa? (Saman tallin autot ja kuljettajat ovat keskenään identtisiä; ainoastaan autojen lukumäärällä on merkitystä.)

3. Tasoon piirretään n ei-yhdensuuntaista suoraa niin, että mitkään kolme niistä eivät leikkaa samassa pisteessä. (So. jokainen "uusi" suora leikkaa kaikki "vanhat" suorat, kunkin eri pisteessä.) Merkitään a_n:llä näin muodostuvien erillisten tasoalueiden määrää: siis $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ jne. Muodosta perusteltu rekursioyhtälö lukujonolle a_n ja ratkaise se.

4. Montako solmua ja montako kaarta on täydellisessä kaksijakoisessa verkossa $K_{m,n}$? Millä ehdoilla verkko $K_{m,n}$ on planaarinen? (Perusteltu vastaus.)

5. (a) Olkoon G mielivaltainen yhtenäinen (suuntaamaton) verkko. Osoita, että jos G ei ole valmiiksi parillisasteinen (so. kaikkien solmujen asteluku ei ole parillinen), niin G voidaan täydentää sellaiseksi lisäämällä yksi uusi solmu u ja tarvittavat kaaret solmun u ja verkon G "vanhojen" solmujen välille.

   (b) Käyttäen hyväksi edellisen kohdan tulosta todista oikeaksi seuraava väite: minkä tahansa yhtenäisen verkon G kaaret voidaan suunnistaa niin, että syntyvässä suhteikossa (suunnatussa verkossa) $\widehat{G}$ on kunkin solmun tulo- ja lähtöasteiden (so. solmua "kohden" ja siitä "poispäin" suunnattujen kaarten määrän) erotus enintään 1.

Pisteytys: Kukin tehtävä 12 pistettä, yhteensä 60 pistettä.