Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan (3 ov)

Loppukoe ke 26.1.2000 klo 8–12

1. Monellako tavalla 6 identtistä palloa voidaan värittää kolmella värillä? Entä jos pallot ovat toisistaan erottuvia (esim. erikokoisia)? Moniko värityksistä sisältää kaikkien kolmen värisiä palloja, kun pallot ovat (a) identtisiä (b) erottuvia?

2. Valtakunnallisessa “Sinnustako Presidentti?” -kilpailussa arvioitiin kilpailijoiden kyvykkyyttä asteikolla 0–6 neljässä lajissa (ulkopolitiikka, sisäpolitiikka, arvomaailma ja ruoanlaitto). Päästäkseen finaaliin kilpailijan tuli saada vähintään yksi piste joka lajista, sekä yhteensä vähintään 17 pistettä 24 mahdollisesta. Monellako eri tavalla vaaditun pistemäärän voi saavuttaa?

3. Ratkaise rekursioyhtälö:
$$\begin{cases} T_0 = 1, \quad T_1 = 1, \\ T_n T_{n-2} = 2T_{n-1}^2, \quad n \geq 2. \end{cases}$$
(*Vihje:* Tarkastele lukujen T_n sijaan niiden 2-kantaisia logaritmeja $t_n = \log_2 T_n$.)

4. *Hyperkuutioverkon* H_n solmuina ovat kaikki n-bittiset binäärijonot $u \in \{0,1\}^n$, ja solmujen u ja v välillä on kaari, jos ja vain jos niiden Hamming-etäisyys on tasan 1 (so. solmuja vastaavat bittijonot eroavat toisistaan tasan yhdessä kohden).
   (a) Piirrä verkko H_3.
   (b) Millä n:n arvoilla verkko H_n sisältää Eulerin kierroksen?
   (c) Mikä on verkon H_n väriluku? (Perusteltu vastaus.)
   (d) Osoita, että jos $n \geq 6$, niin verkko H_n ei ole planaarinen. (*Bonustehtävä +3 p.:* Osoita, että verkko H_n on planaarinen, jos ja vain jos $n \leq 3$.)

5. Todista induktiolla n:n suhteen, että jokainen edellisen tehtävän mukainen hyperkuutioverkko H_n, $n \geq 2$, sisältää Hamiltonin syklin. (*Ohje:* Oleta induktiivisesti, että verkko H_n sisältää Hamiltonin polun solmusta $u = 00\ldots0$ solmuun $v = 10\ldots0$. Totea, että kahdesta tällaisesta polusta voidaan yhdistää verkon H_{n+1} samanmuotoinen Hamiltonin polku $0u \to 0v \to 1v \to 1u$.) Piirrä em. konstruktion mukaiset verkkojen H_3 ja H_4 Hamiltonin syklit.

   (*Huomautus:* Hyperkuution H_n Hamiltonin syklit vastaavat kokonaislukujen 0, …, $2^n - 1$ ns. *syklisiä Gray-koodeja*, joissa kahden peräkkäisen luvun binääriesitykset poikkeavat aina vain yhdessä bitissä.)

Pisteytys: Kukin tehtävä 12 pistettä, yhteensä 60 pistettä.