MAT349 Kombinatoriikka, kevät 2001
Harjoitus 1, 25.1.

1. Todista, että yhtenäinen verkko $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, on kaksijakoinen (so. $\chi(G) = 2$), jos ja vain jos G ei sisällä parittomia syklejä, so. jos mikään G:n aliverkko ei ole muotoa C_{2k+1}, $k \geq 1$.

2. Yritä todistaa, Heawoodin värityslauseen (tasoverkolla G on $\chi(G) \leq 5$) todistusta mukaillen, tasoverkkojen nelivärilausetta. Missä kohden todistusta tulee vaikeuksia?

3. Todista Ramseyn lause yleisessä joukkoperhemuodossaan: kaikilla $r \geq 1$, $s \geq 1$ ja $n_1, \ldots, n_s \geq 1$ on olemassa $N \geq 1$, jolla $N \xrightarrow{r} (n_1, \ldots, n_s)$. (Ks. van Lint & Wilson, ss. 23–24. Voit yksinkertaisuuden vuoksi rajoittua tarkastelemaan tapausta $s = 2$.)

4. Todista seuraava ns. *Schurin lause*. Jos positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbf{N}^+$ ositetaan äärelliseen määrään erillisiä luokkia $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_s$, niin jossakin luokassa $\mathbf{N}_i$ on välttämättä luvut $x, y, z \in \mathbf{N}_i$, joilla $x + y = z$. (Lukujen x, y, z ei tarvitse olla kaikkien eri suuria.) (*Vihje:* Valitse annetulla s riittävän pitkä $\mathbf{N}^+$:n alkusegmentti $\{1, \ldots, N\}$. Väritä verkon K_N kaari $\{i, j\}$ erotuksen $|i - j|$ määräämällä värillä.)

5. Olkoon $m \geq 2$. Osoita, että jos n on riittävän suuri, niin jokainen $n \times n$-binäärimatriisi $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ sisältää sellaisen $m \times m$-alimatriisin B (so. sopivasti valitut m riviä ja vastaavat m saraketta), että matriisin B sekä ala- että yläkolmiomatriisi ovat homogeeniset (so. kumpikin sisältää vain joko 0:aa tai 1:tä). (*Vihje:* Väritä kaari $\{i, j\}$ värillä (a_{ij}, a_{ji}), $i < j$.)