Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan

2. välikoe ke 17.11.1999 klo 8–11

1. (a) Kuinka monta lehteä voi (i) enintään, (ii) vähintään olla n-solmuisessa puussa? (Pelkkä vastaus riittää, ei tarvitse todistaa.)

   (b) Piirrä kaikki keskenään ei-isomorfiset nelilehtiset, enintään 7-solmuiset puut.

2. Olkoon $G = (V, E)$ (suuntaamaton) verkko, jonka jokaisen solmun asteluku on parillinen. Osoita, että G:n kaaret voidaan suunnata niin, että syntyvässä suhteikossa ovat kunkin solmun tulo- ja lähtöaste (= tulevien ja lähtevien kaarien määrä) keskenään yhtä suuret.

3. (a) Olkoon $G = (V, E)$ vähintään 3-solmuinen yhtenäinen tasoverkko, jonka kaikki syklit ovat vähintään neljän pituisia (so. verkko ei sisällä K_3-muotoista indusoitua aliverkkoa eli on *kolmioton*). Osoita, että G:n kaarien määrää rajoittaa tällöin epäyhtälö $|E| \leq 2|V| - 4$. (Kuten luennolla esitettiin, ilman kolmiottomuusoletusta saadaan heikompi epäyhtälö $|E| \leq 3|V| - 6$.)

   (b) Osoita edellisen tuloksen nojalla, että verkko $K_{3,3}$ ei ole planaarinen.

4. Tarkastellaan 15-bittistä Hamming-koodia $\mathcal{H}_{11}$ (11 viestibittiä, 4 pariteettibittiä, 1 virheen korjaus).

   (a) Esitä koodin tarkistusmatriisi, jonka sarakkeet on lueteltu luonnollisessa järjestyksessä.

   (b) Montako koodisanaa koodissa on?

   (c) Määritä koodin teho (engl. *rate*).

   (d) Osoita, että missään 15-bittisessä, 1 virheen korjaavassa koodissa ei voi olla enempää koodisanoja kuin koodissa $\mathcal{H}_{11}$, ja se on siten tässä koodiluokassa maksimaalisen tehokas.

   (e) Anna jokin kelvollinen koodisana $x \neq 0$ ja vahvista, että todella on $x \in \mathcal{H}_{11}$.

   (f) Määritä yhden bittivirheen sisältävää jonoa 011101110011011 vastaava kelvollinen koodisana.

Pisteytys: kukin tehtävä á 9 pistettä, yhteensä 36 pistettä.