Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pekka Orponen

MAT282 Johdatus diskreettiin matematiikkaan (3 ov)

Loppukoe ke 24.1.2001 klo 8–12

1. Piirrä Hasse-kaavio osittainjärjestetystä joukosta $(D_{60}, |)$, missä perusjoukkona ovat luvun 60 kokonaislukutekijät $D_{60} = \{d \in \mathbf{N} \ : \ d|60\}$, ja järjestysrelaationa kokonaislukujen jaollisuusrelaatio: $m|n$, jos luku m on luvun n tekijä.

2. Tentissä on 5 tehtävää, joiden tarkastaminen halutaan jakaa 3 tarkastajan (A, B, C) kesken niin, että jokainen saa tarkastaakseen vähintään yhden tehtävän. Monellako tavalla ositus voidaan tehdä, kun:

   (a) Tehtävien numeroinnilla ei ole väliä, so. ollaan kiinnostuneita vain siitä, montako tehtävää kukin tarkastajista A, B, C saa lukeakseen.

   (b) Tehtävien numerointi on tärkeä, mutta sen sijaan sillä kuka tarkastaa minkä tehtäväjoukon ei ole merkitystä.

   (c) Sekä tehtävien numerointi että tarkastajien henkilöllisyys otetaan huomioon.

3. Tentissä on 5 tehtävää, joista kustakin voi saada 0-12 pistettä. Monellako tavalla tentistä voi saada tulokseksi tasan 30 pistettä niin, että jokaisesta tehtävästä saa vähintään 1 pisteen? (Tehtävien numerointi otetaan huomioon, so. esimerkiksi pistejakauma 1-2-3-12-12 on eri kuin pistejakauma 12-12-3-2-1.) — Jos sinulla ei ole laskinta, ratkaisuksi riittää asianmukainen binomikerroinlauseke.

4. Todista, että yhtenäinen verkko $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, on kaksijakoinen (so. $\chi(G) = 2$), jos ja vain jos G ei sisällä parittomia syklejä, so. jos mikään G:n aliverkko ei ole muotoa C_{2k+1}, $k \geq 1$.

5. Tarkastellaan n alkion *sekoituksia* (engl. derangements), so. permutaatioita $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, joilla $\sigma(i) \neq i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Osoita seulayhtälöä käyttäen, että n alkion sekoituksia on kaikkiaan

$$d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

   kappaletta. (*Lisätieto, ei liity tehtävän ratkaisemiseen:* Kaava osoittaa, että sekoitusten määrä lähestyy n:n kasvaessa nopeasti arvoa $n!\,e^{-1}$. Siten on satunnaisesti valittu n alkion permutaatio sekoitus likimäärin todennäköisyydellä $1/e$.)

Pisteytys: Kukin tehtävä 12 pistettä, yhteensä 60 pistettä.