TIE311 Algoritmiteorian jatkokurssi (2 ov)
Kurssikoe, kevät 1999
Kuulustelija: Pekka Orponen

Tehtävien ratkaisemisen apuna saa käyttää mitä tahansa lähdemateriaalia; ratkaisut tulee kuitenkin laatia henkilökohtaisesti. Vastaukset palautetaan kuulustelijalle henkilökohtaisesti tai suljetussa kirjekuoressa huoneen MaD307 viereiseen postilaatikkoon *perjantaihin 21.5. klo 16 mennessä.* Kukin tehtävä 15 pistettä, yhteensä 60 pistettä.

1. Sanotaan, että kieli A kuuluu luokkaan APC (engl. “almost polynomially correct”), jos A:lla on polynomisessa ajassa toimiva tunnistusalgoritmi, joka kuitenkin voi polynomisen harvassa joukossa tapauksia antaa väärän vastauksen. Osoita, että SAT $\in$ APC jos ja vain jos P $=$ NP. (*Vihjeitä:* Toppaus, äänestys.)

2. Palautetaan mieliin seuraava määritelmä (harjoituksesta 4): Ääretön kieli A on *p-immuuni* (engl. “p-immune”), jos sillä ei ole yhtään ääretöntä polynomisessa ajassa tunnistettavaa osajoukkoa. Osoita, että kaikilla $\epsilon > 0$ kieli
$$\{0,1\}^* \setminus K[2\log_2 n, 2^{(1+\epsilon)n}]$$
on P-immuuni. (Toisin sanoen: jokainen ääretön P-joukko sisältää jonkin merkkijonon x, jolla $K^T(x) \leq 2\log_2 |x|$, $T(n) = 2^{(1+\epsilon)n}$.) [Merkinnät määritelty luentojen ss. 104–105.]

3. Tarkastellaan Kolmogorov-satunnaisten merkkijonojen joukkoa
$$R = \{x \in \{0,1\}^* \mid K(x) \geq |x|\}$$
[luennot, s. 102]. Osoita, että kaikilla $x \in R$ on voimassa $\mathrm{ic}(x : R) \geq K(x) - c$, jollakin x:stä riippumattomalla vakiolla c.[1] (*Vihje:* Osoita, että kaikilla $x \in R$ on voimassa $K(x) \leq \mathrm{ic}(x : R) + c$, sopivalla vakiolla c. Tätä varten totea ensin, että jos R-yhteensopiva ic-ohjelma p hyväksyy merkkijonon x, niin $|x| \leq |p| + d$, jollakin x:stä ja p:stä riippumattomalla vakiolla d.)

4. Tehtäväpaperin kääntöpuolella on kopio todistuksesta[2], jossa luokan NP todistussysteemikarakterisointia NP $=$ PCP(O($\log n$), O(1)) [luennot, s. 121] hyväksi käyttäen osoitetaan, että klikkiongelmalla ei voi olla polynomisessa ajassa toimivaa 1/2-approksimointialgoritmia, paitsi jos P $=$ NP.[3]

   Osoita samaa tekniikkaa käyttäen vastaava approksimoitumattomuustulos seuraavalle NP-täydelliselle *pisin yhteinen alijono* -ongelmalle (engl. “longest common subsequence”, LCS). Merkkijono $s = s_1 \ldots s_p$ on merkkijonon $t = t_1 \ldots t_n$ *alijono*, jos jollakin indeksijonolla $i_1 < \ldots < i_p$ on $s_j = t_{i_j}$. (Huom.: alijonon s merkit sijaitsevat siis jonossa t järjestyksessä, mutta eivät välttämättä peräkkäin.) LCS-ongelmassa syötteenä annetaan kokoelma merkkijonoja $T = \{t^1, \ldots, t^m\}$, ja tehtävänä on määrittää pisin merkkijono, joka esiintyy niissä kaikissa alijonona.

---

[1] Tapausvaativuuskäsitteiden määrittelystä ks. artikkeli “Laskentaongelmien yksittäistapausten vaativuudesta” (`http://www.math.jyu.fi/~orponen/papers/ic_lmt.ps`). Artikkelista on kopio myös kurssimapissa.

[2] Lähde: D. P. Bovet & P. Crescenzi, *Introduction to the Theory of Complexity*, ss. 216–217.

[3] Itse asiassa em. approksimoitumattomuustuloksen todistamiseksi riittää PCP-lauseesta heikompikin muoto NP $=$ PCP(O($\log n$), O($\log n$)), ja klikkiongelman kombinatorisista ominaisuuksista seuraa, että ongelma on 1/2-approksimoituva jos ja vain jos se on k-approksimoituva jollakin vakiolla k.