Algoritmiteorian jatkokurssi, kevät 1999
Harjoitus 4, 26.4. klo 10–12 sali MaD380

1. Osoita, että NP-täydellinen kieli

$$\mathrm{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid \text{verkko } G \text{ sisältää } k \text{ solmun täydellisen aliverkon}\}$$

on kääntyvästi topattava, ja siis p-isomorfinen kielen SAT kanssa.

Olkoon Σ aakkosto. Merkitään $\Sigma^{(n)} = \{x \in \Sigma^* : |x| \leq n\}$, ja sanotaan kielen $A \subseteq \Sigma^*$ *tiheydeksi* funktiota $C_A(n) = |A \cap \Sigma^{(n)}|$. Kieli A on *(polynomisen) harva*, jos jollakin polynomilla $q(n)$ on $C_A(n) \leq q(n)$ kaikilla n, ja *(eksponentiaalisen) tiheä*, jos jollakin $\epsilon > 0$ on $C_A(n) \geq 2^{n^\epsilon}$ äärettömän monella n. (Nämä määritelmät ovat ekvivalentit luentomuistiinpanojen s. 39 esitettyjen kanssa, mutta hieman helpommat käyttää.)

2. Todista luentojen Lemma 5.14: jos A ja B ovat p-isomorfisia kieliä, niin A on harva jos ja vain jos B on harva, ja A on tiheä jos ja vain jos B on tiheä.

3. Sanotaan, että kieli A voidaan tunnistaa *melkein polynomisessa ajassa*, jos A:lla on tunnistusalgoritmi, joka toimii polynomisessa ajassa muuten paitsi harvassa joukossa tapauksia. Merkitään melkein polynomisessa ajassa tunnistettavien kielten luokka APT:llä (engl. "almost polynomial time"). Osoita, että SAT $\in$ APT, jos ja vain jos P $=$ NP. (*Vihje:* Sovella Mahaneyn lausetta 5.20.)

Ääretön kieli A on *p-immuuni* (engl. "p-immune"), jos sillä ei ole yhtään ääretöntä polynomisessa ajassa tunnistettavaa osajoukkoa. Tiedetään, että luokka DEXT sisältää p-immuuneja kieliä (yksi sellainen konstruoidaan luentomuistiinpanojen Lemmassa 5.26), mutta toisaalta jokainen DEXT-*täydellinen* kieli sisältää äärettömiä P-osajoukkoja. On avoin ongelma, voivatko NP-täydelliset kielet olla p-immuuneja (olettaen että P $\neq NP$). Seuraavan tehtävän mukaan ainakaan millään "tunnetulla luonnollisella" NP-täydellisellä kielellä ei ole tätä ominaisuutta.

4. Osoita, että kääntyvästi topattavat kielet eivät voi olla p-immuuneja.

Kieli $A \subseteq \Sigma^{(n)}$ on *p-tuotettava* (engl. "p-printable"), jos jokin polynomisessa ajassa toimiva Turingin kone tuottaa syötteellä 0^n listan joukon $A \cap \Sigma^{(n)}$ alkioista. On avoin ongelma, sisältääkö jokainen ääretön luokan P kieli äärettömän p-tuotettavan osakielen (so. voidaanko jokaisesta polynomisesti ratkeavasta ongelmasta tehokkaasti tuottaa polynomisia esimerkkitapauksia).

5. Todista seuraavat väitteet:
   (a) Kaikki luokan P laskurikielet ovat p-tuotettavia.
   (b) Kaikki p-tuotettavat kielet ovat harvoja ja kuuluvat luokkaan P.

6. Osoita, että jos jokainen ääretön luokan P kieli sisältää äärettömän p-tuotettavan osakielen, niin luokassa NP ei ole p-immuuneja kieliä. (*Vihje:* Sovella luokan NP kielten kvanttoriesitystä.)

7. Todista, luentomuistiinpanojen Lauseen 6.5 nojalla, seuraavat väitteet (vrt. seurauslauseen 6.8 todistus):
   (a) Jos $\Sigma_k^p \neq \Sigma_{k+1}^p$, niin luokka $\Sigma_{k+1}^p \setminus \Sigma_k^p$ sisältää kieliä, jotka eivät ole Σ_{k+1}^p-täydellisiä.
   (b) Jos $\Sigma_k^p \neq \Pi_k^p$, niin luokka $\Sigma_{k+1}^p \setminus \Sigma_k^p$ sisältää kieliä, jotka eivät ole Σ_k^p-kovia eivätkä Π_k^p-kovia (so. joihin ei voi $\leq_m^p$ -palauttaa edellisten harjoitusten 6-tehtävän kieltä U_k eikä kieltä $\overline{U_k}$).