Algoritmiteorian jatkokurssi, kevät 1999
Harjoitus 3, 19.4. klo 10–12 sali MaD380

1. (a) Osoita, että kieli

$$\text{EQUIV} = \{\langle F, G\rangle \mid F,\ G \text{ lausekalkyylin kaavoja, } F \equiv G\}$$

kuuluu luokkaan $\Pi_1^p = \text{co-NP}$. (Merkintä "$F \equiv G$" tarkoittaa, että kaavat toteutuvat täsmälleen samoilla muuttujien totuusarvoasetuksilla.)

   (b) Osoita edellisen nojalla, että kieli

$$\text{MINIM} = \{F \mid F \text{ lausekalkyylin kaava, } F \not\equiv G \text{ kaikilla kaavoilla } G\text{, joilla } |G| < |F|\ \}.$$

kuuluu luokkaan Π_2^p. (*Lisätieto:* Kieli MINIM on itse asiassa Π_2^p-täydellinen.)

2. Osoita, että luokka NP on suljettu pT-palautusten suhteen, jos ja vain jos NP = co-NP.

3. Kieli A on *itsepalautuva* (engl. "self-reducible"), jos on olemassa polynomisessa ajassa toimiva oraakkelikone M, jolla

   (i) $A = L(M, A)$;

   (ii) kullakin syötteellä x kone M tekee oraakkelikyselyjä vain merkkijonoista y, joilla $|y| < |x|$.

   Osoita, että

   (a) kielet SAT ja QBF ovat itsepalautuvia;

   (b) jokainen itsepalautuva kieli kuuluu luokkaan PSPACE.

4. Miksi luentojen lauseen 4.10 ("$\text{DTIME}(2^{cs(n)}) \subseteq \text{ASPACE}(s(n))$") todistus edellyttää, että simuloitava kone on deterministinen (eikä esim. epädeterministinen)?

KÄÄNNÄ

5. Alternoiva Turingin kone on Σ_k*-kone* (Π_k*-kone*), $k \geq 1$, jos sen alkutila on eksistentiaalinen (universaalinen), ja missä tahansa koneen laskennassa (so. millä tahansa laskentapolulla) koneen tila vaihtuu eksistentiaalisesta universaaliseksi tai toisinpäin (kone "alternoi") enintään $k-1$ kertaa. Lisäksi voidaan deterministisiä koneita sanoa Σ_0- tai Π_0-koneiksi. Määritellään vaativuusluokat:

$$\begin{aligned}
\Sigma_k\mathrm{P} &= \{L(M) \mid M \text{ on polynomisessa ajassa toimiva } \Sigma_k\text{-kone}\};\\
\Pi_k\mathrm{P} &= \{L(M) \mid M \text{ on polynomisessa ajassa toimiva } \Pi_k\text{-kone}\};\\
\Sigma_k\mathrm{PSPACE} &= \{L(M) \mid M \text{ on polynomisessa tilassa toimiva } \Sigma_k\text{-kone}\};\\
\Pi_k\mathrm{PSPACE} &= \{L(M) \mid M \text{ on polynomisessa tilassa toimiva } \Pi_k\text{-kone}\}.
\end{aligned}$$

Osoita, että kaikilla $k \geq 0$ on $\Sigma_k\mathrm{P} = \Sigma_k^p$ ja $\Pi_k\mathrm{P} = \Pi_k^p$. (*Ohje:* Todistus induktiolla k:n suhteen. Induktioaskelta varten tarkastele mielivaltaisen polynomisessa ajassa toimivan Σ_{k+1}-koneen M tunnistamaa kieltä A, ja sen rinnalla kieltä

$$\mathrm{Continue}_M = \{\alpha \mid \alpha \text{ on hyväksymiseen johtava koneen } M \text{ universaalinen tilanne}\}.$$

Totea, että kieli $\mathrm{Continue}_M$ kuuluu luokkaan $\Pi_k\mathrm{P} = \Pi_k^p$, ja että väite $A \in \Sigma_{k+1}^p$ seuraa tästä pienillä lisätarkasteluilla. *Huom.:* Vastaavalla argumentilla voidaan osoittaa, että Savitchin lauseen seurauksena on

$$\Sigma_k\mathrm{PSPACE} = \Pi_k\mathrm{PSPACE} = \mathrm{PSPACE}$$

kaikilla $k \geq 0$.)

6. Osoita, että kaikilla $k \geq 1$ seuraava kieli on Σ_k^p-täydellinen:

$$U_k = \{\langle M, x, 0^t\rangle \mid M \text{ on alternoiva kone, jonka alkutila on eksistentiaalinen, ja joka hyväksyy syötteen } x \text{ enintään } k-1 \text{ alternaatiolla ja } t \text{ siirtymällä } \}.$$

Lisätieto (ei tarvitse todistaa): Jonkin verran luonnollisempi Σ_k^p-täydellisten kielten perhe on:

$$k\text{-QBF} = \{F \mid F \text{ on tosi kvantifioidun lausekalkyylin kaava, jossa on enintään } k-1 \text{ kvanttorialternaatiota, ja ensimmäinen kvanttori on } \exists \}.$$