Algoritmiteorian jatkokurssi, kevät 1999
Harjoitus 2, 12.4. klo 10–12 sali MaD380

1. Palautetaan mieleen, että funktio $s : N \to N$ on *tilakonstruoituva*, jos jollakin deterministisellä moninauhaisella Turingin koneella M on voimassa: $\mathrm{space}_M(x) = s(|x|)$ kaikilla syötejonoilla x. Todista seuraavat väitteet:

   (a) Funktiot $s(n) = k$ (vakio), $s(n) = n$ ja $s(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ ovat tilakonstruoituvia.

   (b) Jos $s_1(n)$ ja $s_2(n)$ ovat tilakonstruoituvia, niin myös $s_1(n) + s_2(n)$, $s_1(n)s_2(n)$ ja $2^{s_1(n)}$ ovat tilakonstruoituvia.

   (c) Jokaisella rekursiivisella funktiolla $r(n)$ on olemassa tilakonstruoituva $s(n) \geq r(n)$.

2. Todista, että jokaisella tilakonstruoituvalla $f(n) \geq \log_2 n$ on voimassa sisältyvyys

$$NSPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} DTIME(c^{f(n)}).$$

   (*Vihje:* Muodosta verkko, jonka solmut ovat simuloitavan epädeterministisen koneen tilannekuvauksia.)

3. Todista seuraava väite: Olkoon $A = \exists^q B$ ($A = \forall^q B$), missä q on polynomi ja $B \in \Pi_k^p$ (Σ_k^p), $k \geq 0$. Olkoon $q' \geq q$ toinen polynomi. Tällöin on olemassa $B' \in \Pi_k^p$ (Σ_k^p), jolla $A = \exists^{q'} B'$ ($A = \forall^{q'} B'$).

4. Todista, että polynomisen aikavaativuushierarkian luokilla Σ_k^p, Π_k^p, $k \geq 0$ on seuraavat sulkeumaominaisuudet (luentomuistiinpanojen Lause 2.8, s. 13):

   (a) Jos $A, B \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p), niin $A \cup B$, $A \cap B \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p).

   (b) Jos $A \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p) ja $B \leq_m^p A$, niin $B \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p).

   (c) Jos $A \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p), $k \geq 1$, ja $B = \exists^q A$ ($B = \forall^q A$), q polynomi, niin $B \in \Sigma_k^p$ (Π_k^p).

   (Sovitaan täsmällisyyden vuoksi, että polynomisen hierarkian luokkien määrittelyssä käytetään parikoodausfunktiota $\langle y, x \rangle = d(y)10x$, missä $d(a_1 \ldots a_n) = a_1 a_1 \ldots a_n a_n$, ja tästä edelleen johdettua jonokoodausfunktiota $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_m \rangle \rangle = d(x_1)10d(x_2)10 \ldots 10x_m$.)

Huom.: Pääsiäisloman takia kurssilla ei ole ohjelmaa 5.4. eikä 7.4. Seuraavat demot ja luennot ovat maanantaina 12.4.