Algoritmiteorian jatkokurssi, kevät 1999
Harjoitus 1, 29.3. klo 10–12 sali MaD380

1. Palautetaan mieliin Automaatit ja kieliopit -kurssilta, että formaali kieli A on *säännöllinen*, jos se voidaan tunnistaa äärellisellä automaatilla. Mitä voit sanoa säännöllisten kielten tunnistamisen vaativuudesta Turingin kone -mallissa (so. millaisilla aika- ja tilarajoilla $t(n)$ ja $s(n)$ saadaan kaikki säännölliset kielet mukaan luokkiin DTIME($t(n)$) ja DSPACE($s(n)$))?

2. Olkoon $M_\lambda, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, \ldots$ jokin Turingin koneiden efektiivinen luettelointi. (Vrt. Automaatit ja kieliopit -kurssi.) Osoita, että jos $t(n)$ on rekursiivinen funktio, niin kieli

$$D^t = \{c \in \{0,1\}^* \mid \text{Turingin kone } M_c \text{ ei hyväksy syötettä } c \text{ ajassa } t(|c|)\}$$

on rekursiivinen, mutta ei kuulu luokkaan DTIME($t(n)$).

3. Osoita, että jos $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ on polynomisessa ajassa laskettava funktio, niin jokaisella merkkijonolla $x \in \Gamma^*$ kuuluu alkukuvajoukko $f^{-1}(x)$ luokkaan P. Yleistä tulos koskemaan kaikkia alkukuvajoukkoja $f^{-1}(A)$, missä $A \in \mathrm{P}$.

4. Osoita, että luokka P on suljettu yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhteen.

5. Osoita, että luokka NP on suljettu yhdisteiden ja leikkausten suhteen. Luokan ei tiedetä olevan suljettu komplementoinnin suhteen: mihin vaikeuteen törmätään yritettäessä todistaa tätä ominaisuutta?

6. Koska luokan NP ei tiedetä olevan suljettu komplementoinnin suhteen, on mielenkiintoista tarkastella sen duaaliluokkaa

$$\text{co-NP} = \{\Sigma^* \setminus A \mid A \in \text{NP}\}.$$

   Todista seuraavat luokan co-NP ominaisuudet:

   (a) $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$;

   (b) $\mathrm{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$;

   (c) jos $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$, niin $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ ja $\mathrm{NP} \neq \mathrm{PSPACE}$.

   (*Vihje:* Komplementointi.)