Algoritmien teoria, kevät 1999
Harjoitus 6, 1.3. klo 10–12 sali MaD380

1. Tarkastellaan kauppamatkustajan ongelmaa täydellisessä verkossa G, jonka solmuina ovat tason pisteet (i, j), missä $i = 1, 2, 3$ ja $j = 1, 2, 3$. Solmuja on siis yhdeksän kappaletta. Solmujen välisten kaarten kustannukset ovat samat kuin vastaavien pisteiden euklidiset etäisyydet. Simuloi luennolla (muistiinpanojen ss. 143–146) esitettyjen kahden ΔTSP-approksimointialgoritmin ("kahdesti puun ympäri" -tekniikka ja Christofidesin algoritmi) toimintaa tässä verkossa. Kokeile kahta tai useampaa virittävää puuta algoritmien lähtökohtana. Laske myös algoritmien tuottamien ratkaisujen suhteelliset virheet.

2. Tarkastellaan seuraavaa solmupeiteongelman ahnetta approksimointialgoritmia: Verkosta valitaan peitteeseen lisättäväksi solmu, jonka asteluku on mahdollisimman suuri, ja poistetaan kaikki siihen liittyvät kaaret. Tätä toistetaan, kunnes verkossa ei ole enää kaaria jäljellä. Osoita, että algoritmi voi pahimmassa tapauksessa valita peitteen C, jolla $|C| > 2|C^*|$, missä C^* on optimipeite.

3. Ratkaise repunpakkausongelma, jossa tavaroiden "koot" ovat (4, 1, 2, 3, 2, 1, 2) ja "arvot" vastaavasti (299, 73, 159, 221, 137, 89, 157) soveltamalla luennolla (ss. 149–152) esitettyä ϵ-approksimointiskeemaa parametrin ϵ arvolla 1. Repun maksimikoko on 10.

4. Tarkastellaan seuraavaa NP-täydellistä *lokerointiongelmaa* (engl. Bin Packing):

   > Annettu joukko välin $(0, 1)$ reaalilukuja $x_1, \ldots, x_n$. Luvut on ositettava mahdollisimman pieneen määrään osajoukkoja ("lokeroita") siten, että kunkin osajoukon alkioiden summa on korkeintaan 1.

   Ongelman ahne *first fit*-approksimointialgoritmi toimii seuraavasti: Luvut käsitellään järjestyksessä $x_1, \ldots, x_n$. Luku x_i sijoitetaan lokeroiden järjestyksessä ensimmäiseen lokeroon, johon se mahtuu. Osoita, että tämä menettely on 1-approksimointialgoritmi, so. tarvitsee enintään kaksinkertaisen määrän lokeroita optimaaliseen nähden. (*Vihje:* Osoita, että *first fit*-heuristiikka täyttää kaikki lokerot, paitsi mahdollisesti yhden, ainakin puolilleen.)

5. Todista luennolla esitetty Seurauslause 7.1 (muistiinpanojen s. 153): Jos P $\neq$ NP, niin luokassa NP $\setminus$ P on kieliä (ongelmia), jotka eivät ole NP-täydellisiä.

6. (a) Todista seuraava luennolla esitetyn Lauseen 7.8 (muistiinpanojen s. 154) yleistys: Olkoon $\mathcal{C}$ jokin kieliluokka (so. ongelmaluokka, esim. $\mathcal{C}$ = P, NP, PSPACE,...). Kieli (ongelma) A on co-$\mathcal{C}$-täydellinen, jos ja vain jos sen komplementtikieli $\bar{A}$ on $\mathcal{C}$-täydellinen.

   (b) Osoita tämän tuloksen perusteella, että lausekalkyylin kaavojen tautologisuusongelma (muistiinpanojen s. 154) on co-NP-täydellinen.