Algoritmien teoria, kevät 1999
Harjoitus 1, 25.1. klo 10–12 **sali MaD302**

1. Määritä rekursioyhtälön

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4T(n/4) + \sqrt{n}, \qquad \text{kun } n = 4^k, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

   tarkka ratkaisu, kun n on neljän potenssi.

2. Eräissä "hajota ja hallitse"-tyyppisissä algoritmeissa voidaan n:n kokoinen ongelman tapaus osittaa tasaisesti $\sqrt{n}$:n kokoisiin osatapauksiin niin, että algoritmin aikavaativuutta $T(n)$ tulee kuvaamaan rekursiokaava:

$$T(n) \leq \begin{cases} c & \text{kun } n = 2 \\ \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + bn, & \text{kun } n > 2. \end{cases}$$

   Määrää O-yläraja funktiolle $T(n)$. (*Vihje:* Tee muuttujanvaihto $n = 2^k$.)

3. Ratkaise generoivia funktioita käyttäen rekursioyhtälö

$$\begin{cases} t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \\ t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

   (*Vihje:* Kun olet määrittänyt jonon $\langle t_n \rangle$ generoivan funktion, yritä kirjoittaa sen nimittäjänä oleva lauseke muotoon $(1-az)(1-bz)$ ja sovella sitten osamurtolukuhajotelmaa.)

4. Tiedetään (Anal. pk/jk), että nollan ympäristössä suppeneva potenssisarja voidaan derivoida termeittäin, so. jos $G(z) = \sum_{k\geq 0} p_k z^k$, niin $G'(z) = \sum_{k\geq 1} kp_k z^{k-1}$.

   (a) Johda tämän tiedon avulla jonon $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ generoiva funktio jonon $\langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ generoivasta funktiosta.

   (b) Oletetaan, että jonon $\langle p_k \rangle$ arvot ovat jonkin diskreetin todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyyksiä, siis esim. "p_k = todennäköisyys, että algoritmin suoritus vaatii tasan k askelta". Mitä on tällöin $G(1)$? Entä mikä on arvon $G'(1)$ tulkinta?

5. Ohjelma käsittelee kahta pinoa S ja T, joihin voidaan tavallisten pino-operaatioiden (*push, pop*) lisäksi kohdistaa kopiointi-operaatioita *copy*(S,T) ja *copy*(T,S). Suunnittele pinoille taulukkototeutus, jossa kopiointi-operaation yhteydessä ainoastaan edellisen kopioinnin jälkeen tapahtuneet muutokset päivitetään pinosta toiseen. Osoita, että tässä toteutuksessa minkä tahansa aluksi samansisältöisiin pinoihin kohdistuvan n operaation jonon kokonaissuoritusaika on vain $O(n)$.